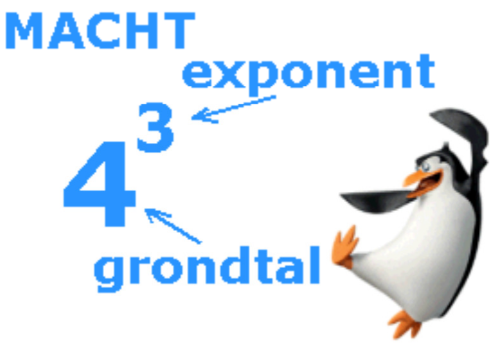
Hoofdstuk 5 - machten, exponenten en logaritmen

rekenregels voor machten en logaritmen

wortels waar of niet waar

0. voorkennis

HERLEIDEN VAN MACHTEN - rekenregels voor machten



Bij het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal tel je de exponenten op:

- ✔ $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

Bij het delen van machten met hetzelfde grondtal trek je de exponenten van elkaar af:

- ✔ $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

Bij de macht van een macht vermenigvuldig je de exponenten met elkaar:

- ✔ $(a^p)^q = a^{pq}$

Bij de macht van een product krijg je een product van machten:

- ✔ $(ab)^p = a^p b^p$

En ook:

- ✔ $a^1 = a$
- ✔ $a^0 = 1$

1. machten en wortels

Machten met negatieve exponenten	Formules met machten herleiden
Hieronder zie je nog een keer de rekenregels voor machten: ✔ $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ ✔ $(a^p)^q = a^{pq}$ ✔ $(ab)^p = a^p \cdot b^p$ ✔ $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ **Negatieve exponenten** De laatste rekenregel verdient nog enige aandacht. Volgens deze regel zou 2^5 gedeeld door 2^5 gelijk moeten zijn aan 2^0. Maar er zou eigenlijk 1 uit moeten komen. Kennelijk is 2^0=1. Op dezelfde manier kan je aantonen: $a^0 = 1 \text{ met } a \neq 0$ Volgens dezelfde regel: $\frac{2^3}{2^5} = 2^{3-5} = 2^{-2}$ Kennelijk kunnen exponenten negatief zijn!? $\frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$ Dus kennelijk is $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$. Meer in 't algemeen geldt: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$	De formule $y = 3(2x^2)^5 \cdot \frac{4}{x^{12}}$ kun je schrijven in de vorm $y = ax^n$. Je gebruikt daarnbij de rekenregels voor machten. $y = 3\left(2x^2\right)^5 \cdot \frac{4}{x^{12}}$ $y = 3 \cdot 2^5 \cdot \left(x^2\right)^5 \cdot 4 \cdot x^{-12}$ $y = 3 \cdot 32 \cdot x^{10} \cdot 4 \cdot x^{-12}$ $y = 384x^{-2}$ **Voorbeeld** Schrijf $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ in de vorm $y = b \cdot g^x$ **Uitwerking** $y = 40 \cdot 3^{-2x+1}$ $y = 40 \cdot 3^{-2x} \cdot 3^1$ $y = 40 \cdot \left(3^{-2}\right)^x \cdot 3$ $y = 120 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^x$ $y = 120 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^x$

Formules met hogeremachtswortels	**Machten met gebroken exponenten**
Sommige hogeremachtswortels komen mooi uit. Zo is $\sqrt[3]{125} = 5$, want $5^3 = 125$. Merk op dat $\sqrt[3]{-125} = -5$. Immers $(-5)^3 = -125$ Maar $\sqrt{-9}$ bestaat niet, want er is geen getal dat in het kwadraat -9 oplevert. Om dezelfde reden bestaat $\sqrt[4]{-16}$ niet. Een getal tot de vierde macht is niet negatief. **In 't algemeen** Bestaat $\sqrt[n]{a}$? Als $a \geq 0$ dan ja. Voor $a < 0$ alleen als n is oneven. **Rekenregel** $\sqrt[n]{A \cdot B} = \sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$	De rekenregels voor machten gelden ook als p en q breuken zijn. Dus je kunt bijvoorbeeld schrijven: $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$ Maar dat is hetzelfde als: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ Meer in het algemeen geldt: $a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a} \;\; en \;\; a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \;\; met \; a > 0$ Door gebruik te maken van deze regel kan je soms handig rekenen, herleiden en vereenvoudigen.

2. wortelformules

Domein en bereik van wortelfuncties	De grafiek van een wortelfunctie tekenen	Vergelijkingen met wortels	Variabelen vrijmaken bij wortelformules
De eenvoudigste wortelfunctie is **de standaard functie** $f(x) = \sqrt{x}$ Je kunt veel wortelsfuncties opvatten als transformaties van de standaard functie. Zie **domein en bereik bepalen van een wortelfunctie**	Bij 't tekenen van wortelfuncties kijk je naar het domein en naar het beginpunt. Zie **voorbeelden grafieken tekenen**	Drie stappen bij het algebraïsch oplossen van wortelvergelijkingen: ✔ **isoleren** ✔ **kwadrateren** ✔ **controleren** Zie **voorbeelden vergelijkingen oplossen**	Bij wortelfuncties kun je soms 'x' ook uit drukken in 'y'. Zie **variabelen vrijmaken**

3. exponentiële functies

De standaardfunctie y=g^x

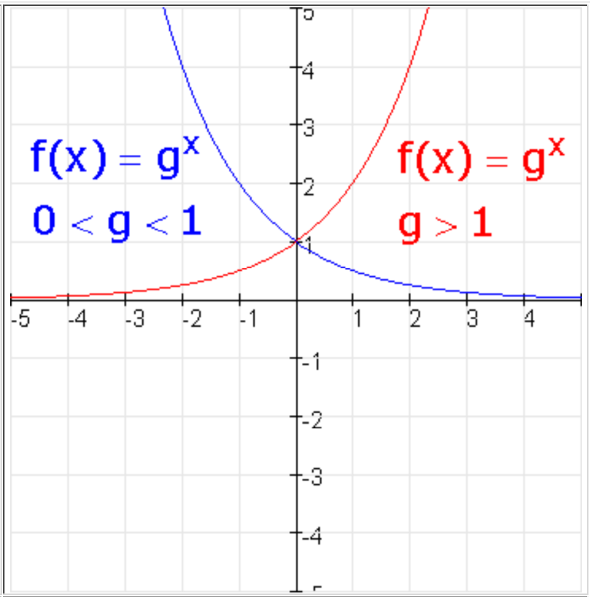
Een functie van de vorm $f(x) = g^x$ met g constant en $g > 0$ is een **exponentiële functie**. De variabele x staan in de exponent.

De grafiek van f is stijgend als $g > 1$ en de grafiek is dalend in het geval $0 < g < 1$.

De x-as is een **asymptoot**.

- ✔ $D_f = R$
- ✔ $B_f =< 0, \rightarrow >$

De functie $f(x) = g^x$ is een standaardfunctie en de grafiek is een standaardgrafiek. Je mag ze zonder toelichting tekenen.



Transformaties en exponentiële functies

Door de standaardgrafiek $y = g^x$ te verschuiven, te vermenigvuldigen of te spiegelen onstaan andere grafieken.

Mogelijke transformaties:

- ✔ Spiegelen in de x- of y-as
- ✔ Verticale of horizontale verschuiving
- ✔ Vermenigvuldigen t.o.v. de x- of y-as

Zie **overzicht transformaties van grafieken** voor een volledig overzicht.

Voorbeelden

- ✔ Opgave $A50$ op bladzijde 32

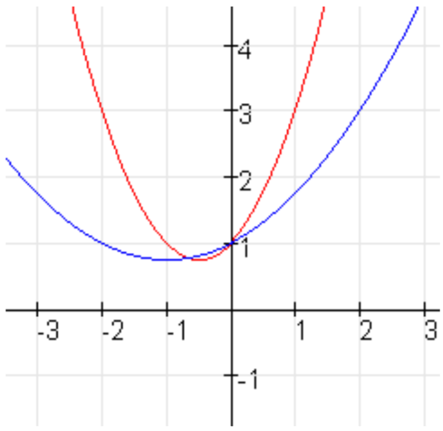
Uitwerkingen

- ✔ Zie uitwerkingenboek

Zie ook **toepassingen van transformaties van grafieken**

Vermenigvuldigen met een factor t.o.v. y-as

Vervang 'x' door '$\frac{1}{a}$x' als je wilt vermenigvuldigen met de factor 'a' t.o.v. de y-as.



Voorbeeld
Als je $f(x) = x^2 + x + 1$ bijvoorbeeld wilt vermenigvuldigen met de factor 2 t.o.v. de y-as dan krijg je:

$$f(x) = (\tfrac{1}{2}x)^2 + \tfrac{1}{2}x + 1$$
$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{2}x + 1$$

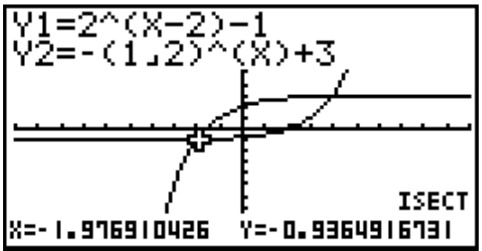
Exponentiële ongelijkheden

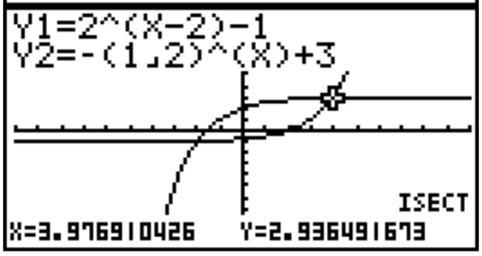
Voorbeeld 1

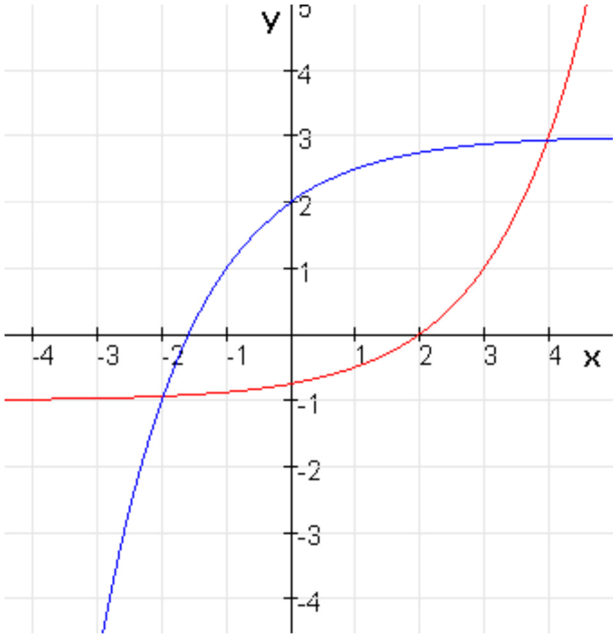
Los op: $2^{x-2}-1<-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+3$

Uitwerking

Neem $f(x)=2^{x-2}-1$.
Neem $g(x)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}+3$.
Plot de grafieken op je GR, benader de snijpunten en geef de oplossingen zodat f(x)<g(x).







Oplossing: -2,0<x<4,0

Voorbeeld 2

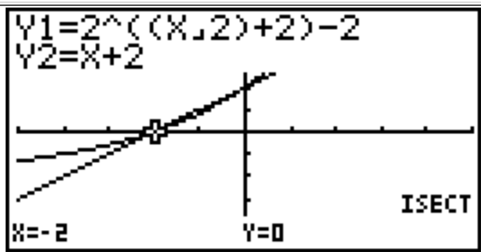
Gegeven $f(x)=2^{\frac{x}{2}+2}-2$ en $g(x)=x+2$.
Los op: f(x)>g(x)

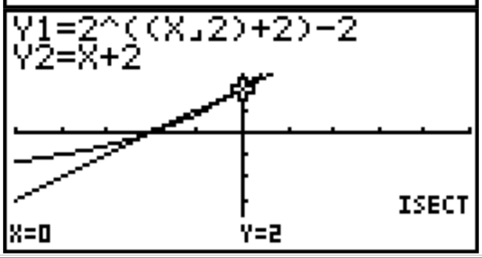
Uitwerking

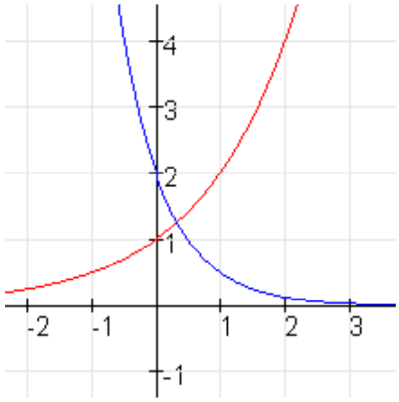
Benader de snijpunten met je GR.

Oplossing: $x<2 \vee x>0$

Is dit een exacte oplossing? Kun je de vergelijking f(x)=g(x) algebraïsch oplossen?





Voorbeeld 3 Los exact op: $4 \cdot 2^{x-2} < 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ **Uitwerking** Plot de grafieken met je GR en bereken exact het spijpunt. $4 \cdot 2^{x-2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$ $2^2 \cdot 2^{x-2} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2^2}\right)^x$ $2^x = 2 \cdot \left(2^{-2}\right)^x$ $2^x = 2^1 \cdot 2^{-2x}$ $2^x = 2^{-2x+1}$ $x = -2x + 1$ $3x = 1$ $x = \frac{1}{3}$ Oplossing: $x > \frac{1}{3}$	

Exponentiële vergelijkingen algebraïsch oplossen	**Voorbeelden**
Sommige exponentiële vergelijkingen moet je algebraische kunnen oplossen. **Voorbeelden** ✔ $2^{x-3} = \sqrt{2}$ ✔ $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ ✔ $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$ Je werkt dan toe naar een vorm waarin het linkerlid en het rechterlid als macht van hetzelfde grondtal geschreven zijn. Je gebruikt: ✔ Als $g^A = g^B$ dan $A = B$	$2^{x-3} = \sqrt{2}$ $2^{x-3} = 2^{\frac{1}{2}}$ $x - 3 = \frac{1}{2}$ $x = 3\frac{1}{2}$ $3^{x+1} = \frac{1}{9}\sqrt{3}$ $3^{x+1} = 3^{-2} \cdot 3^{\frac{1}{2}}$ $3^{x+1} = 3^{-1\frac{1}{2}}$ $x + 1 = -1\frac{1}{2}$ $x = -2\frac{1}{2}$ $2 \cdot 3^{2x-1} = 18$ $3^{2x-1} = 9$ $3^{2x-1} = 3^2$ $2x - 1 = 2$ $2x = 3$ $x = 1\frac{1}{2}$

4. logaritmen

De logaritme

In ${}^{g}log(x)$ heet g het grondtal van de logaritme.

${}^{g}log(x)$ is de exponent van het grondtal g waarmee de macht gelijk is aan x.

$g^{{}^{g}log(x)} = x$

Hoofdregel

Als ${}^{g}log(x) = y$ dan $x = g^{y}$

Voorbeelden

- ✔ ${}^{2}log(\frac{1}{8}\sqrt{2}) = -2\frac{1}{2}$
- ✔ ${}^{5}log(0,04) = -2$

Logaritmische vergelijkingen

- ✔ Als ${}^{g}log(x) = y$ dan $x = g^{y}$

Voorbeeld

$$a.\ {}^{3}\log\left(2x^{2} - 3\right) = 6$$

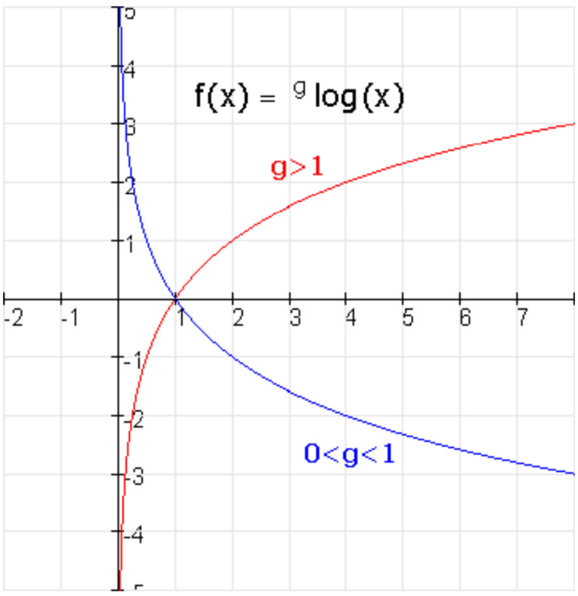
$$b.\ {}^{\frac{1}{2}}\log\left(\frac{1}{4x}\right) = 4$$

$$c.\ {}^{2}\log\left(4 - 30x^{2}\right) = -2$$

Zie **logaritmische vergelijkingen uitgewerkt**

Logaritmische functie

De functie $f(x) = {}^{g}\ log(x)$ is een standaardfunctie. De grafiek is een standaardgrafiek.



- ✔ domein: $\langle 0, \rightarrow \rangle$
- ✔ stijgend voor g>1 en dalend voor 0<g<1
- ✔ bereik R
- ✔ verticale asymptoot x=0

De vergelijking a^{x}=c

De exacte oplossing van de vergelijking $a^{x} = c$ is $x = {}^{a}\ log(c)$

Voorbeelden

Bereken de exacte oplossing van:

- ✔ $3^{x+1} = 80$
- ✔ $5 + 2^{3x} = 25$
- ✔ $4 - log(\frac{1}{x}) = 2$

Zie **logaritmische vergelijkingen deel 2**

Je kunt grafieken van functies van de vorm $f(x) = {}^{g}\ log(ax + b) + c$ opvatten als een combinatie van transformaties van **de standaardfunctie**.

- ✔ **voorbeeld grafiek logaritmische functie tekenen**

Variabelen vrijmaken bij exponentiële formules Hier gaat het er om dat je een formule als bijvoorbeeld $y=500-10^{0,1x+1,5}$ ook kan schrijven als x=.... We noemen dat 'x vrijmaken'. **Voorbeeld** $y = 500 - 10^{0,1x+1,5}$ $10^{0,1x+1,5} = 500 - y$ $0,1x + 1,5 = \log(500 - y)$ $0,1x = \log(500 - y) - 1,5$ $x = 10 \cdot \log(500 - y) - 15$	**Nog een voorbeeld** $y = 2 \cdot 3^x + 1$ $2 \cdot 3^x = y - 1$ $3^x = \frac{y-1}{2}$ $x = {}^3\log\left(\frac{y-1}{2}\right)$ **Extra opgaven:** Maak x vrij: ✔ $y = 25 - 5^{\frac{1}{2}x+2}$ ✔ $y = 3 \cdot 2^x + 5$ ✔ $y = 10^{x^2} - 1$ Zie **extra opgaven uitgewerkt**